Εξέταση Ιουνίου 2021 - Εισαγωγή στην Τοπολογία (Α. Τόλιας)

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Πρόκειται για 7 θέματα επιλογής όπου στο καθένα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές επιλογές και 3 θέματα ανάπτυξης των οποίων η απάντηση δίνεται με το πληκτρολόγιο του υπολογιστή. Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Ανάπτυξης 1.

(i) Να αναφέρετε τον ορισμό του πλήρη μετρικού χώρου.

(ii) Να αναφέρετε τον ορισμό του ακολουθιακά συμπαγή μετρικού χώρου.

(iii) Να αποδείξετε με άμεση απόδειξη (δηλ. δίχως να χρησιμοποιήσετε ότι η συμπάγεια είναι ισοδύναμημε την ακολουθιακή συμπάγεια) ότι κάθε ακολουθιακά συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Ανάπτυξης 2. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}
&d(a,a) = 3, \quad && d(a,b) = 12, \quad && d(a,c) = 4,\\
&d(b,a) = 9, && d(b,b) = 0, && d(b,c) = 0,\\
&d(c,a) = 4, && d(c,b) = 7, && d(c,c) = 0.
\end{aligned}$$

Εξηγήστε γιατί η d δεν είναι μετρική και γιατί αν αλλάξουμε μια ή δύο από τις παραπάνω εννιά τιμές δεν μπορούμε να την καταστήσουμε μετρική. Έπειτα, δείξτε πως αλλάζοντας τρεις (ποιες δύο και ποιες τιμές πρέπει να δώσουμε;) από τις εννιά τιμές τηε d μπορούμε να την καταστήσουμε μετρική. Εξηγήστε λεπτομερώς και να εξηγήσετε επίσης αν το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση.

Ανάπτυξης 3.

(α) Να αναφέρετε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ του οποίου το σύνολο των σημείων συσσώρευσης περιέχει τα ψηφία του αριθμού μητρώου σας και μόνον αυτά.

(β) Να αναφέρετε ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$ του οποίου το σύνορο να περιέχει τα ψηφία του αριθού μητρώου σας και μόνον αυτά.

Σημείωση: Αν πχ ο αριθμός μητρώου σας είναι 19229, τότε το σύνολοο των ψηφίων σας θα είναι το $\{1, 2, 9\}$, ενώ πχ αν ο αριθμός μητρώου σας είναι το 17831 το σύνολο των ψηφίων σας θα είναι το $\{1, 3, 7, 8\}$.

Ερώτηση 4. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, A υποσύνολο του X ώστε για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του A, υπάρχει $x \in A$ με $x_n \to x$. Έστω επίσης B ένα υποσύνολο του X ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του B, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in B$ με $x_{k_n} \to x$. Τότε, μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) το A είναι συμπαγές

(ii) το A είναι πλήρες

(iii) το B είναι συμπαγές

(iv) το B είναι πλήρες

(v) το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

(vi) το $A \cap B$ είναι πλήρες.

Ερώτηση 5. Στο $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική, θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 < 5, x \leq y\}.$$

Τότε:

(i) Το σημείο $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ είναι σημείο επαφής A.

(ii) Το σημείο $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ είναι εσωτερικό σημείο του A.

(iii) Το σημείο $(2, 2)$ είναι σημείο επαφής A.

(iv) Το σημείο $(2, 1)$ είναι σημείο συσσώρευσης A.

(v) Το A είναι ανοικτό.

(vi) Το A είναι συμπαγές.

Ερώτηση 6. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι:

(i) Αν υπάρχουν δύο μη κενά και κλειστά υποσύνολα K, L του X με $K \cap L = \emptyset$ και $K \cup L = X$ τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

(ii) Αν υπάρχει ένα υποσύνολο A του X ώστε $\emptyset \neq A \neq X$ και $\overline{A} = A^o$, τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

(iii) Αν K είναι συνεκτικό υποσύνολο του X και L είναι ένα κλειστό υποσύνολο του K, τότε το L είναι συνεκτικό.

(iv) Αν υπάρχουν δύο υποσύνολα K, L του X ώστε $K \neq X$, $L \neq \emptyset$ και $K^o = \overline{L}$ τότε ο X δεν είναι συνεκτικός.

Ερώτηση 7. Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι και $f \colon X \to Y$ μια συνάρτηση. Ποιες απο τις παρακάτω προτάσεις ειναι ισοδύναμες με τον ισχυρισμό: «**Η f είναι συνεχής**»;

(i) Για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του Y το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y.

(ii) Για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του X το $f(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

(iii) Για κάθε κλειστό υποσύνολο A του X το $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(iv) Για κάθε κλειστό υποσύνολο A του Y το $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

(v) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο A του X το $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(vi) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο A του Y το $f^{-1}(A)$ είναι συμπαγες υποσύνολο του Y.

Ερώτηση 8. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Τότε,

(i) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $\emptyset \neq A \neq X$ και $\rho(A, X \setminus A) > 0$, τότε το A είναι ανοικτό.

(ii) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $\emptyset \neq A \neq X$ και $\rho(A, X \setminus A) > 0$, τότε το A είναι κλειστό.

(iii) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $A \neq \emptyset$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $\rho(x, y) > \mathrm{diam}(A) - \epsilon$.

(iv) Αν A είναι ένα υποσύνολο του X με $A \neq \emptyset$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $\rho(x, y) - \epsilon < \mathrm{diam}(A)$.

Ερώτηση 9. Ας είναι (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, I ένα μη κενό σύνολο και $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε,

(i) Αν το I είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει $int\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} int(A_i)$.

(ii) Αν το I είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει $int\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} int(A_i)$.

(iii) Αν το I είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει $cl\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cl(A_i)$.

(iv) Αν το I είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει $cl\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cl(A_i)$.

(v) Αν το I είναι αριθμήσιμο και κάθε A_i είναι ανοικτό και πυκνό, τότε το σύνολο $\bigcap_{i\in I} A_i$ είναι πυκνό.

(vi) Αν ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης , το I είναι αριθμήσιμο και κάθε A_i είναι ανοικτό και πυκνό, τότε το σύνολο $\bigcap_{i\in I} A_i$ είναι πυκνό.

Ερώτηση 10. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική d. Τότε, στον $(\mathbb{R}, d)$ έχουμε:

(i) η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ τείνει (ως προς την d) στο 0.

(ii) Το σύνολο $(0, 1)$ είναι ανοικτό.

(iii) Το σύνολο $(0, 1)$ είναι κλειστό.

(iv) Το σύνολο $(0, 1)$ είναι συμπαγές.

(v) Το σύνολο $(0, 1)$ είναι συνεκτικό.

(vi) κανένα από τα παραπάνω.